Intégration par la méthode de Gauss

Notations

On note $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ l'algèbre réelle des fonctions réelles définies et continues sur $[-1,1]$.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre réelle des polynômes réels en l'indéterminée X, et, pour $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n.

Pour $P\in\mathbb{R}[X]$ et $m\in\mathbb{N}$, on note $P^{(m)}$ le polynôme dérivé de P à l'ordre m.

On identifiera, polynôme et fonction polynomiale associée.

Partie I

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $U_n=(X^2-1)^n$ et $P_n=\dfrac{n!}{(2n)!}U_n^{(n)}$.

1.a Déterminer le degré ainsi que le coefficient dominant de P_n.

1.b Justifier que la famille $\mathcal{B}=(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.a En exploitant la formule de Leibniz, établir : $P_n=\dfrac{1}{\binom{2n}{n}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k$.

2.b En déduire les valeurs de $P_n(1)$ et de $P_n(-1)$.

3.a Déterminer les racines de U_n ainsi que leur multiplicité.

3.b En exploitant le théorème de Rolle, montrer que P_n possède au moins n racines dans l'intervalle $]-1,1[$.

3.c Le polynôme P_n peut-il avoir d'autres racines que celles évoquées ci-dessus ?
Quelle est la multiplicité des racines P_n ?

4.a Etablir que $\forall P,Q\in\mathbb{R}[X]$, on a :

$$\int_{-1}^{1}P^{(n+1)}(t)Q(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[P^{(n-k)}(t)Q^{(k)}(t)\right]_{-1}^{1}+(-1)^{n+1}\int_{-1}^{1}P(t)Q^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\,.$$

4.b En déduire que pour tout $Q\in\mathbb{R}_n[X]$ on a : $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_{n+1}(t)Q(t)\mathrm{d}t=0$

Partie II

On reprend les notations de la partie précédente.

On note $a_0,a_1,\ldots,a_n$ les racines distinctes du polynômes P_{n+1}.

1. On considère l'application $\varphi:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}^{n+1}$ définie par $\varphi(P)=\big(P(a_0),P(a_1),\ldots,P(a_n)\big)$.

1.a Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ - espaces vectoriels.

1.b En déduire que pour tout $f\in\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$, il existe un unique polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i\in\{0,1,\ldots,n\}$ on ait $P(a_i)=f(a_i)$. On notera $P=P_f$ cet unique polynôme déterminé par f.

2. Pour tout $i\in\{0,1,\ldots,n\}$, on pose $L_i=\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(X-a_k)$.

2.a Pour $i,j\in\{0,1,\ldots,n\}$, calculer $L_i(a_j)$.

2.b Justifier que la famille $\mathcal{C}=(L_0,L_1,\ldots,L_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.c Soit $f\in\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.
Exprimer les composantes $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ de P_f dans la base $\mathcal{C}$ à l'aide des valeurs de f et de L_i en a_i.

3. Pour $f\in\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$, on pose $I(f)=\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t$ et $J(f)=\int_{-1}^{1}P_f(t)\mathrm{d}t$.

3.a Montrer que $J(f)$ peut s'écrire $J(f)=\sum_{i=0}^{n}\mu_i f(a_i)$
avec des réels μ_i qu'on exprimera en fonction des L_i et des a_i.

3.b Observer que $J:f\mapsto J(f)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.

3.c Montrer que si f est une fonction polynomiale de degré inférieur à n alors $J(f)=I(f)$.

3.d On suppose maintenant que f est une fonction polynomiale de degré inférieur à $2n+1$.
En réalisant la division euclidienne de f par P_{n+1}, montrer qu'on a encore $J(f)=I(f)$.

3.e Etablir que les μ_i sont strictement positifs.

4. Soit $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$. On pose $M=\sup_{t\in[-1,1]}\left|f^{(2n+2)}(t)\right|$.

4.a Exprimer la partie régulière du développement de Taylor de f à l'ordre $2n+1$ en 0.
Celle-ci sera notée $T_{2n+1}(f)$.

4.b En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à f établir que : $\left|I(f)-I(T_{2n+1}(f))\right|\leq\dfrac{2M}{(2n+3)!}$.

4.c Obtenir de même : $\left|J(f)-J(T_{2n+1}(f))\right|\leq\dfrac{2M}{(2n+2)!}$.

4.d En déduire une majoration de $\left|I(f)-J(f)\right|$.

Correction

Partie I

1.a U_n est un polynôme unitaire de degré $2n$ donc $U_n^{(n)}$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant $\dfrac{(2n)!}{n!}$. Par suite P_n est un polynôme unitaire de degré n.

1.b La famille $\mathcal{B}$ est une famille de polynôme de degrés étagés.

2.a Par la formule de Leibniz :
$$\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}=\left((X-1)^n(X+1)^n\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((X-1)^n\right)^{(k)}\left((X+1)^n\right)^{(n-k)}$$
puis $\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k}\dfrac{n!}{k!}(X+1)^k=n!\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k$
et enfin $P_n=\dfrac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k$.

2.b $(X-1)^{n-k}$ s'annule en 1 sauf quand $k=n$ donc $P_n(1)=\dfrac{2^n}{\binom{2n}{n}}$. De même $P_n(-1)=\dfrac{(-2)^n}{\binom{2n}{n}}$.

3.a $U_n=(X-1)^n(X+1)^n$.
Les racines de U_n sont 1 et -1, elles sont de multiplicité n.

3.b La fonction $x \mapsto U_n(x)$ est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et s'annule en 1 et -1 donc par le théorème de Rolle, $\exists \alpha \in]-1,1[$ tel que $U_n'(\alpha) = 0$.

Or U_n' s'annule aussi en 1 et -1 car ce sont ici les racines de U_n de multiplicité n.

En appliquant le théorème de Rolle sur $[-1,\alpha]$ et sur $[\alpha,1]$, on obtient deux réels distincts $\beta \in]-1,\alpha[$ et $\gamma \in]\alpha,1[$ annulant U_n''. Or U_n'' s'annule aussi en 1 et -1 et on peut reprendre le processus...

A terme, on observe que $U_n^{(n)}$, tout comme P_n, s'annule au moins n fois dans l'intervalle $]-1,1[$.

3.c Puisque le polynôme P_n est de degré n, il possède au plus n racines (comptées avec multiplicité). Comme ci-dessus nous venons d'en obtenir n, on peut affirmer qu'il n'y en a pas d'autres et que celles-ci sont simples.

4.a Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Pour $n = 0$, on reconnaît la formule d'intégration par parties.

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P^{(n+2)}(t)Q(t)\mathrm{d}t &\underset{HR}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[P^{(n+1-k)}(t)Q^{(k)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1}\int_{-1}^{1} P'(t)Q^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \\ &\underset{\text{ipp}}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[P^{(n+1-k)}(t)Q^{(k)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1}\left[P(t)Q^{(n+1)}(t)\right]_{-1}^{1} (-1)^{n+2}\int_{-1}^{1} P(t)Q^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\left[P^{(n+1-k)}(t)Q^{(k)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^{n+2}\int_{-1}^{1} P(t)Q^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Récurrence établie.

4.b $$\int_{-1}^{1} P_{n+1}(t)Q(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} U_{n+1}^{(n+1)}(t)Q(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[U_{n+1}^{(n-k)}(t)Q^{(k)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1}\int_{-1}^{1} U_{n+1}(t)Q^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Or $Q^{(n+1)}(t) = 0$ et $U_{n+1}^{(n-k)}(\pm 1) = 0$ car 1 et -1 sont racines de multiplicité $n+1$ de U_{n+1}.

Ainsi $\int_{-1}^{1} P_{n+1}(t)Q(t)\mathrm{d}t = 0$.

Partie II

1.a Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q) &= \left((\lambda P + \mu Q)(a_i)\right)_{0\leq i\leq n} = \left(\lambda P(a_i) + \mu Q(a_i)\right)_{0\leq i\leq n} \\ &= \lambda\left(P(a_i)\right)_{0\leq i\leq n} + \mu\left(Q(a_i)\right)_{0\leq i\leq n} = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)\end{aligned}$$

Ainsi φ est linéaire.

Soit $P \in \ker\varphi$. On a $P(a_0) = \ldots = P(a_n) = 0$ donc P possède au moins $n+1$ racines.

Or $\deg P \leq n$ donc $P = 0$. Ainsi $\ker\varphi = \{0\}$.

Par le théorème d'isomorphisme ($\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \mathbb{R}^{n+1} < +\infty$) φ est un isomorphisme.

1.b P est solution du problème posé ssi $\varphi(P) = \left(f(a_0),\ldots,f(a_n)\right)$.

φ étant bijective, le problème posé possède une unique solution $P_f = \varphi^{-1}\left(f(a_0),\ldots,f(a_n)\right)$.

2.a Si $j \neq i$ alors $L_i(a_j) = 0$. Si $j = i$ alors $L_i(a_i) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(a_i - a_k) \neq 0$.

2.b Supposons $\lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n = 0$.

$\forall 0 \leq i \leq n$, en évaluant la relation précédente en a_i : $\lambda_i L_i(a_i) = 0$, or $L_i(a_i) \neq 0$, donc $\lambda_i = 0$.

La famille $\mathcal{C}$ est une famille libre de $n+1 = \dim \mathbb{R}_{n+1}[X]$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ (car $\deg L_i = n$), c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.c En évaluant la relation $P_f = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j$ en a_i on obtient :

$P_f(a_i) = \lambda_i L_i(a_i)$ or $P_f(a_i) = f(a_i)$ donc $\lambda_i = \dfrac{f(a_i)}{L_i(a_i)}$.

3.a $J(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \int_{-1}^{1} L_i(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \mu_i f(a_i)$ avec $\mu_i = \dfrac{1}{L_i(a_i)} \displaystyle\int_{-1}^{1} L_i(t)\mathrm{d}t$.

3.b Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$.

$J(\alpha f + \beta g) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mu_i (\alpha f + \beta g)(a_i) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i (\alpha f(a_i) + \beta g(a_i)) = \alpha \sum_{i=0}^{n} \mu_i f(a_i) + \beta \sum_{i=0}^{n} \mu_i g(a_i)$

puis $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$ donc J est linéaire. De plus J est à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est donc une forme linéaire.

3.c Si $f \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P_f = f$ et par suite $J(f) = I(f)$.

3.d Si $f \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ alors réalisons la division euclidienne de f par P_{n+1} :

$f = P_{n+1}Q + R$ avec $\deg R < \deg P_{n+1}$ d'où $R \in \mathbb{R}_n[X]$.

En évaluant la relation ci-dessus en a_i on obtient $f(a_i) = R(a_i)$ car $P_{n+1}(a_i) = 0$.

Par suite $P_f = R$ et donc, en exploitant de surcroît I.4.b :

$I(f) = I(P_{n+1}Q + R) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_{n+1}(t)Q(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} R(t)\mathrm{d}t = 0 + \int_{-1}^{1} P_f(t)\mathrm{d}t = J(f)$.

3.e $L_i^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X] \subset \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ donc $I(L_i^2) = J(L_i^2)$.

Or $J(L_i^2) = \mu_i L_i^2(a_i)$ et $I(L_i^2) > 0$ (par intégration d'une fonction continue, positive non nulle).

Par suite $\mu_i = \dfrac{I(L_i^2)}{L_i^2(a_i)} > 0$.

4.a $T_{2n+1}(f)(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$.

4.b L'inégalité de Taylor Lagrange donne $\forall t \in [-1,1], \left|f(t) - T_{2n+1}(f)(t)\right| \le \dfrac{Mt^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

$\left|I(f) - I(T_{2n+1}(f))(t)\right| \le \displaystyle\int_{-1}^{1} \left|f(t) - T_{2n+1}(f)(t)\right|\mathrm{d}t = \frac{M}{(2n+2)!} \int_{-1}^{1} \left|t^{2n+2}\right|\mathrm{d}t = \frac{2M}{(2n+3)!}$.

4.c Puisque les μ_i sont positifs, on a la propriété $f \le g \Rightarrow J(f) \le J(g)$.

$f(t) - T_{2n+1}(f)(t) \le \dfrac{M\left|t^{2n+2}\right|}{(2n+2)!} \le \dfrac{M}{(2n+2)!}$ donc $J(f) - J(T_{2n+1}(f)) \le \dfrac{2M}{(2n+2)!}$

car la fonction $t \mapsto \dfrac{M}{(2n+2)!}$ étant constante $J\left(\dfrac{M}{(2n+2)!}\right) = I\left(\dfrac{M}{(2n+2)!}\right) = \dfrac{2M}{(2n+2)!}$.

De même $J(T_{2n+1}(f)) - J(f) \le \dfrac{2M}{(2n+2)!}$ et donc $\left|J(f) - J(T_{2n+1}(f))\right| \le \dfrac{2M}{(2n+2)!}$.

4.d Notons $J(T_{2n+1}(f)) = I(T_{2n+1}(f))$ car $T_{2n+1}(f) \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

$\left|I(f) - J(f)\right| \le \left|I(f) - I(T_{2n+1}(f))\right| + \left|J(T_{2n+1}(f)) - J(f)\right| \le \dfrac{2M}{(2n+3)!} + \dfrac{2M}{(2n+2)!} = \dfrac{4(n+2)M}{(2n+3)!}$.